ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ PEANO

Οι φυσικοί αριθμοί, που ως γνωστόν συμβολίζονται με το γράμμα N, έχουν τις εξής χαρακτηριστικές (θεμελιώδεις) ιδιότητες ή αξιώματα, σύμφωνα με τον Ιταλό μαθηματικό και φιλόσοφο G. Peano (1858 – 1932) :

- ***Αξίωμα – 1*** : Υπάρχει ένας τουλάχιστον φυσικός αριθμός, που είναι ο 1, δηλ. $1 \in N$.
- ***Αξίωμα – 2*** : Κάθε φυσικός αριθμός, που συμβολίζεται με ν, έχει έναν ***επόμενο*** φυσικό αριθμό, τον οποίο συμβολίζουμε με $\nu+1$, δηλ. αν $\nu \in N \Rightarrow \nu+1 \in N$.
- ***Αξίωμα – 3*** : Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που να έχει επόμενο τον φυσικό αριθμό 1, δηλ. $\forall \nu \in N \Rightarrow \nu+1 \neq 1$.
- ***Αξίωμα – 4*** : Δεν υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί που να έχουν τον ίδιο επόμενο, δηλ. αν $\mu \in N$, $\nu \in N$ και $\mu+1=\nu+1 \Rightarrow \mu=\nu$.
- ***Αξίωμα – 5*** : Αν για ένα υποσύνολο S του N ισχύουν τα εξής :
    1. $1 \in S$ και
    2. Αν $\nu \in S \Rightarrow (\nu+1) \in S$, τότε συμπεραίνουμε ότι το σύνολο S ταυτίζεται με το σύνολο N των φυσικών αριθμών, δηλ. $S=N$.

Το αξίωμα – 5 λέγεται ***«η αρχή της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής»*** και εκφράζεται συμβολικά ως εξής :

$$\left(\frac{1 \in S}{\nu \in S \Rightarrow \nu+1 \in S}\right) \Rightarrow S = N$$

Οι πρώτες μελέτες για τη μέθοδο της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής έγιναν από τον Ιταλό μαθηματικό Francesco Mauroliko τον $16^{ο}$ αιώνα και τον γνωστό Γάλλο ερευνητή Blaise Pascal τον $17^{ο}$ αιώνα. Τελικά, οι όροι «τέλεια επαγωγή» ή «μαθηματική επαγωγή» καθιερώθηκαν τον $19^{ο}$ αιώνα από τους A. De Morgan και R. Dedekind.

ΠΡΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΄Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Το θεώρημα για την πρώτη μορφή της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής είναι το εξής :

Αν $p(\nu)$ είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το σύνολο N των φυσικών αριθμών, ώστε να ισχύει :

- Είναι αληθής η πρόταση $p(1)$ και
- Είναι αληθής η πρόταση $\forall k \in N,\ p(k) \Rightarrow p(k+1)$

τότε ο προτασιακός τύπος $p(\nu)$ είναι αληθής, δηλ. ισχύει, $\forall \nu \in N$.

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής για μια πρόταση $p(\nu)$, σύμφωνα με την πρώτη μορφή της μεθόδου, κάνουμε πρώτα επαλήθευση ότι η πρόταση ισχύει για $\nu=1$ και μετά με την υπόθεση ότι η πρόταση $p(k)$ είναι αληθής, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι και η πρόταση $p(k+1)$ είναι αληθής. Συμπεραίνουμε έτσι ότι η πρόταση $p(\nu)$ είναι αληθής $\forall \nu \in N$.

Υπάρχει περίπτωση, αντί για $\nu=1$, να χρησιμοποιήσουμε έναν φυσικό αριθμό ν_0 και έτσι να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu=\nu_0$ και μετά με την υπόθεση ότι ισχύει για $\nu=k$, να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=k+1$, όπου $k \in N$ και $k \geq \nu_0$. Άρα η πρόταση θα είναι αληθής $\forall \nu \in N$, όπου $\nu \geq \nu_0$. Σ' αυτή την περίπτωση ο προτασιακός τύπος $p(\nu)$ θα έχει ως σύνολο αναφοράς ένα γνήσιο υποσύνολο του N.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΄Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Το θεώρημα για τη δεύτερη μορφή της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής είναι το εξής :

Αν p(ν) είναι ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών, ώστε να ισχύει :

- Είναι αληθείς οι προτάσεις p(1), p(2) και
- Είναι αληθής η πρόταση $\forall\, k \in N$, όπου $k>2$, $p(k-2) \wedge p(k-1) \Rightarrow p(k)$

τότε ο προτασιακός τύπος p(ν) είναι αληθής, δηλ. ισχύει, $\forall\, \nu \in N$.

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής για μια πρόταση p(ν), σύμφωνα με τη δεύτερη μορφή της μεθόδου, κάνουμε πρώτα επαλήθευση ότι η πρόταση ισχύει για $\nu=1$ και για $\nu=2$, και μετά με την υπόθεση ότι οι προτάσεις $p(k-2)$ και $p(k-1)$ είναι αληθείς, όπου $k>2$, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι και η πρόταση p(k) είναι αληθής. Συμπεραίνουμε έτσι ότι η πρόταση p(ν) είναι αληθής $\forall\, \nu \in N$.

Υπάρχει περίπτωση, όπως και στην πρώτη μορφή της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής, αντί για $\nu=1$ και για $\nu=2$, να χρησιμοποιήσουμε έναν φυσικό αριθμό ν_0 και έτσι να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu=\nu_0$ και για $\nu=\nu_0+1$ και μετά με την υπόθεση ότι ισχύει για $\nu=k$ και για $\nu=k+1$, να αποδείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=k+2$, όπου $k \in N$ και $k \geq \nu_0$. Άρα η πρόταση θα είναι αληθής $\forall\, \nu \in N$, όπου $\nu \geq \nu_0$. Σ’ αυτή την περίπτωση ο προτασιακός τύπος p(ν) θα έχει ως σύνολο αναφοράς ένα γνήσιο υποσύνολο του Ν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$1+2+3+\ \dots\ +\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$
2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$1+3+5+\ \dots\ +(2\nu-3)+(2\nu-1) = \nu^2$$
3. Να αποδειχθεί ότι αν $\alpha \in R$ και $\alpha \geq -1$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$(1+\alpha)^\nu \geq 1+\nu\alpha \textit{ (ανισότητα του Bernoulli)}$$
4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 3$, ισχύει :
$$3^\nu > (\nu+1)^2$$
5. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 3$, ισχύει :
$$\nu^2 > 2\nu+1$$
6. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 7$, ισχύει :
$$\left(\frac{4}{3}\right)^\nu > \nu$$
7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$5^\nu > 5\nu - 1$$
8. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$2+4+6+\ \dots\ +2\nu = \nu(\nu+1)$$
9. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +\nu^2 = \frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$$
10. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +\nu^3 = (1+2+3+\ \dots\ +\nu)^2 = \frac{1}{4}\nu^2(\nu+1)^2$$
11. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$2^3+4^3+6^3+\ \dots\ +(2\nu)^3 = 2\nu^2(\nu+1)^2$$
12. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$1.2+2.3+3.4+\ \dots\ +\nu(\nu+1) = \frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)$$
13. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ \dots\ +\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{\nu}{\nu+1}$$
14. Αν $0<\alpha_i \neq 1$, $\forall$ i=1, 2, ..., ν, να αποδειχθεί ότι :
$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ \dots\ (1+\alpha_\nu) > 2^\nu.\sqrt{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\nu}\ ,\ \forall \nu \in N$$
15. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 4$, ισχύει :
$$\left(\frac{3}{2}\right)^\nu > \nu+1$$
16. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 4$, ισχύει :
$$3^{\nu-1} > \nu^2$$
17. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 4$, ισχύει :
$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[\nu]{\nu}$$

18. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 4$, ισχύει :
$$\nu! > 2^\nu$$
19. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2} \leq 2 - \frac{1}{\nu}$$
20. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 3$, ισχύει :
$$\nu^{\nu+1} > (\nu+1)^\nu$$
21. Να αποδειχθεί ότι αν $\alpha \in R$ και $0 \leq \alpha \leq 1$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$(1-\alpha)^\nu \geq 1 - \nu\alpha$$
22. Να αποδειχθεί ότι αν $\alpha \in R$ και $0 \leq \alpha \leq 1$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$(1-\alpha)^\nu \leq \frac{1}{1+\nu\alpha}$$
23. Να αποδειχθεί ότι αν $\alpha \in R$ και $\alpha > 1$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$, ισχύει :
$$0 < \sqrt[\nu]{\alpha} - 1 < \frac{1}{\nu}(\alpha - 1)$$
24. Να αποδειχθεί ότι αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in R^+$ και $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \ldots (1+\alpha_\nu) \geq 1 + \sigma_\nu$$
25. Να αποδειχθεί ότι αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in R^+$ και $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει :
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_\nu}\right) \geq \nu^2$$
26. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ο παρακάτω αριθμός α_ν είναι φυσικός.
$$\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\nu - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\nu\right]$$
27. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει το εξής :
$$(3+\sqrt{5})^\nu + (3-\sqrt{5})^\nu = \text{πολλαπλάσιο του } 2^\nu$$
(Υπόδ. Να εφαρμοσθεί η δεύτερη μορφή της μαθηματικής επαγωγής).
28. Αν α, β, $\gamma \in Z$, όπου $\gamma \geq 0$, και ισχύει $\alpha^2 - \beta^2.\gamma$ = πολλαπλάσιο του 4, να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, ισχύει το εξής :
$$(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu + (\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu = \text{πολλαπλάσιο του } 2^\nu$$
(Υπόδ. Να εφαρμοσθεί η δεύτερη μορφή της μαθηματικής επαγωγής).