ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Ο ΚΥΚΛΟΣ

Ο ***κύκλος*** C με κέντρο το σημείο Ο (0, 0), δηλαδή την αρχή των αξόνων, και ακτίνα ρ, έχει την παρακάτω εξίσωση :

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$$

Ο κύκλος με ακτίνα ρ = 1 και κέντρο το σημείο Ο (0, 0), έχει την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ και λέγεται ***μοναδιαίος κύκλος***. Οι εξισώσεις $x = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y = \rho\eta\mu\varphi$, όπου $\varphi \in [0, 2\pi)$, λέγονται ***παραμετρικές εξισώσεις*** του κύκλου C.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου C με εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$, στο σημείο $A(x_1, y_1)$, είναι η εξής :

$$\boxed{xx_1 + yy_1 = \rho^2}$$

Ο κύκλος C με κέντρο το σημείο Κ (x_0, y_0) και ακτίνα ρ, έχει την παρακάτω εξίσωση :

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου C με εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, στο σημείο $A(x_1, y_1)$, είναι η εξής :

$$\boxed{(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2}$$

Αν έχουμε μια εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, τότε ισχύουν τα εξής :

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη και δεν υπάρχουν σημεία του επιπέδου οι συντεταγμένες των οποίων να την επαληθεύουν.

Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Αποκαλείται ***παραβολή*** με ***εστία*** ένα σημείο Ε και ***διευθετούσα*** μια ευθεία δ, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από την εστία Ε και την ευθεία δ. Αν Α είναι η προβολή της εστίας Ε στην δ, τότε το μέσο Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΕΑ είναι σημείο της παραβολής και λέγεται ***κορυφή*** της παραβολής.

Η εξίσωση μιας παραβολής σ' ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy, όπου η αρχή Ο (0, 0) είναι η κορυφή της παραβολής και ο άξονας x'x είναι η κάθετη από την εστία $E=\left(\frac{p}{2},0\right)$ στην διευθετούσα $\delta: x=-\frac{p}{2}$, είναι η εξής :

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Ο αριθμός p λέγεται ***παράμετρος*** της παραβολής και η απόλυτη τιμή του παριστάνει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα. Κάθε παραβολή βρίσκεται στο ημιπεπίπεδο που ορίζουν η διευθετούσα δ και η εστία Ε. Η κάθετη από την εστία στην διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται ***άξονας*** της παραβολής.

Η εξίσωση της εφαπτομένης μιας παραβολής σ' ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι η εξής :

$$\boxed{yy_1 = p(x + x_1)}$$

Ανακλαστική Ιδιότητα της Παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής σ' ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t, που είναι παράλληλη με τον άξονα της παραβολής.

Η ΕΛΛΕΙΨΗ

Αποκαλείται ***έλλειψη*** με ***εστίες*** τα σημεία Ε και Ε' ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία Ε και Ε' είναι σταθερό και μεγαλύτερο του τμήματος ΕΕ'. Το άθροισμα αυτό συμβολίζεται με ***2α*** και η απόσταση των εστιών με ***2γ***, η οποία αποκαλείται και ***εστιακή απόσταση*** της έλλειψης. Ισχύει γ < α.

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε' (–γ, 0) και Ε (γ, 0) και σταθερό άθροισμα 2α, είναι η εξής :

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \text{ όπου } \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$$

Αν το κέντρο Ο των συστήματος συντεταγμένων είναι το κέντρο της έλλειψης, τότε οι άξονες x'x και y'y είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης και η αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας της έλλειψης.

Η παραπάνω έλλειψη τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία (–α, 0) και (α, 0) και τον άξονα y'y στα σημεία (0, –β) και (0, β). Τα παραπάνω σημεία λέγονται ***κορυφές*** της έλλειψης και τα ευθύγραμμα τμήματα με μήκος 2α και 2β, ***μεγάλος άξονας*** και ***μικρός άξονας*** αντίστοιχα.

Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε σημεία της έλλειψης που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της Ο λέγεται ***διάμετρος*** της έλλειψης και αυτή είναι μεγαλύτερη ή ίση από τον μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από τον μεγάλο άξονα της έλλειψης.

Αποκαλείται ***εκκεντρότητα*** της έλλειψης και συμβολίζεται με το γράμμα ε, ο λόγος $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} < 1$.

Ισχύει :

$$\boxed{\varepsilon^2 = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ και } \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα μιας έλλειψης, τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη. Αν ε=0, τότε η έλλειψη γίνεται κύκλος και αν το ε τείνει να γίνει ίσο με 1, τότε η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμα τμήμα. Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα λέγονται ***όμοιες***.

Οι ***παραμετρικές εξισώσεις*** της έλλειψης είναι οι εξής :

$$\boxed{x = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi,\ y = \alpha\eta\mu\varphi,\ \text{όπου } \varphi \in [0, 2\pi)}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης μιας έλλειψης σ' ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι η εξής :

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta_2} = 1}$$

Ανακλαστική Ιδιότητα της Έλλειψης

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης σ' ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ διχοτομεί τη γωνία $E'M_1E$, όπου Ε' και Ε είναι οι εστίες της έλλειψης.

Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Αποκαλείται ***υπερβολή*** με ***εστίες*** τα σημεία Ε' και Ε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα σημεία Ε' και Ε είναι σταθερή και μικρότερη του τμήματος Ε'Ε. Την διαφορά αυτή την παριστάνουμε με 2α και την απόσταση των εστιών με 2γ, η οποία αποκαλείται ***εστιακή απόσταση*** της υπερβολής.

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε' (–γ, 0) και Ε (γ, 0) και σταθερή διαφορά 2α, είναι η εξής :

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{, όπου } \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}$$

Μια υπερβολή με την παραπάνω εξίσωση έχει τους άξονες x'x και y'y ως άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων ως κέντρο συμμετρίας, το οποίο αποκαλείται και ***κέντρο*** της υπερβολής.

Η παραπάνω υπερβολή τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία (–α, 0) και (α, 0), τα οποία λέγονται ***κορυφές*** της υπερβολής. Μια υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους και δεν τέμνει τον άξονα y'y.

Οι ***ασύμπτωτες*** της υπερβολής είναι οι παρακάτω ευθείες :

$$\boxed{y=\frac{\beta}{\alpha}x \text{ και } y=-\frac{\beta}{\alpha}x}$$

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου που έχει κορυφές τα σημεία (α, β), (α, –β), (–α, –β) και (–α, β), το οποίο λέγεται ***ορθογώνιο βάσης*** της υπερβολής.

Αποκαλείται ***εκκεντρότητα*** της υπερβολής και συμβολίζεται με το γράμμα ε, ο λόγος $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$.

Ισχύει :

$$\boxed{\varepsilon^2=1+\frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ και } \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}}$$

Η εκκεντρότητα της υπερβολής προσδιορίζει τον συντελεστή διεύθυνσης της ασυμπτώτου της, δηλαδή χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης και συνεπώς και τη μορφή της ίδιας της υπερβολής. Όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες γίνεται το ορθογώνιο βάσης της και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Ισοσκελής υπερβολή είναι αυτή στην οποία έχουμε α = β, οπότε $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης μιας υπερβολής σ' ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι η εξής :

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta_2} = 1}$$

Οι υπερβολές με εξισώσεις $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ λέγονται ***συζυγείς*** και έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες.

Ανακλαστική Ιδιότητα της Υπερβολής

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σ' ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ διχοτομεί τη γωνία $E'M_1E$, όπου E' και E είναι οι εστίες της έλλειψης.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E$

Είδαμε στα προηγούμενα ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{\Gamma}{2}, -\frac{\Delta}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{\Gamma^2 + \Delta^2 - 4E}}{2}$, εφόσον ισχύει $\Gamma^2 + \Delta^2 - 4E > 0$. Στην περίπτωση αυτή βέβαια έχουμε Α = Β = 1.

Στην γενικότερη περίπτωση που έχουμε Α ≠ Β, για να δούμε τι παριστάνει η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$, θα πρέπει να δημιουργήσουμε τις δύο παραστάσεις στο τετράγωνο για το x και για το y και να δούμε σε ποια κωνική τομή ταιριάζει το αποτέλεσμα. Αν χρειαστεί, θα πρέπει να κάνουμε και παράλληλη μεταφορά των αξόνων για να τοποθετηθεί η νέα αρχή των αξόνων της κωνικής τομής στο κατάλληλο σημείο.

Ακολουθούν παραδείγματα :

- Η εξίσωση $y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$ μετατρέπεται στη μορφή $(y-2)^2 = 2.4(x+1)$ και άρα παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο (–1, 2) και άξονα την ευθεία y = 2.
- Η εξίσωση $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ μετατρέπεται στη μορφή $\frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$ και άρα παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο (4, 3) και με α = 3 (ο μεγάλος άξονας είναι κατακόρυφος), β = 2 και $\gamma = \sqrt{5}$.

- Η εξίσωση $9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y - 252 = 0$ μετατρέπεται στη μορφή $\frac{(x-2)^2}{4^2} - \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$ και άρα παριστάνει υπερβολή με κέντρο το σημείο (2, –3) και με α = 4, β = 3 και γ = 5.

Στην περίπτωση που έχουμε μια εξίσωση της μορφής $Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + Z = 0$, δηλαδή έχει προστεθεί και ένας όρος με το xy, τότε για να απαλειφθεί το xy, θα πρέπει να κάνουμε στροφή των αξόνων κατά μια γωνία θ, η οποία μπορεί να βρεθεί αν θέσουμε :

$x = X\text{συν}\theta - Y\text{ημ}\theta$
$y = X\text{ημ}\theta + Y\text{συν}\theta$

Για να απαλλαγούμε από τον όρο xy, θα πρέπει να λύσουμε το παραπάνω σύστημα και να βρούμε την κατάλληλη γωνία θ που να μηδενίζει τον συντελεστή που περιέχει τον όρο xy. Οι άξονες θα πρέπει τότε να στραφούν κατά τη γωνία θ.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΚΑΙ ΚΩΝΙΚΗΣ ΤΟΜΗΣ

Αν θεωρήσουμε μια ευθεία με εξίσωση y = αx + β και μια κωνική τομη με εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$, τότε η ευθεία και η κωνική τομη έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, που είναι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος.

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα, θέτουμε στην δεύτερη εξίσωση όπου y = αx + β και έτσι προκύπτει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού, η οποία :

- Αν έχει δύο ρίζες άνισες, τότε η ευθεία και η κωνική τομή τέμνονται.
- Αν έχει δύο ρίζες ίσες (Δ = 0), τότε η ευθεία εφάπτεται της κωνικής τομής.
- Αν δεν έχει καμία πραγματική ρίζα, τότε η ευθεία και η κωνική τομή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που περνάνε από το σημείο (3, 1) και να αποδειχθεί ότι οι εφαπτομένες αυτές είναι κάθετες.
2. Δίνονται οι κύκλοι $(x – 2)^2 + (y – 3)^2 = 25$ και $x^2 + (y + 1)^2 =9$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του πρώτου κύκλου στο σημείο (5, –1) και να αποδειχθεί ότι αυτή η ευθεία εφάπτεται και στον δεύτερο κύκλο.
3. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και περνάει από το σημείο (α–β, α+β). *(Απ. $x^2 + y^2 = 2(\alpha^2+\beta^2)$)*.
4. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $\alpha x+\beta y = \alpha^2+\beta^2$. *(Απ. $x^2 + y^2 =\alpha^2+\beta^2$)*.
5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x+3$. *(Απ. $y=2x+5$ και $y=2x-5$)*.
6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ όταν αυτή είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$. *(Απ. $y=-2x+5$ και $y=-2x-5$)*.
7. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση $x^2 + y^2 +4x – 6y – 3 =0$. *(Απ. (–2, 3) και 4)*.
8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 – 2x + 4y + 4 =0$ στο σημείο του (1, –1). *(Απ. $y= –1$)*.
9. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία με εξίσωση xσυνφ + yημφ = 4ημφ – 2συνφ + 4 εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x – 8y + 4 = 0$.
10. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων από τα οποία είναι κάθετες μεταξύ τους οι εφαπτομένες προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$. *(Απ. $x^2 + y^2 = 2\rho^2$)*.
11. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία (–3, 0) και (3, 0) είναι σταθερός και ίσος με 2. *(Απ. $(x – 5)^2 + y^2 = 16$)*.
12. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία (0, 6), (–1, –1) και (6, 6). *(Απ. $x^2 + y^2 – 6x – 4y – 12 = 0$)*.
13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτομένη στον κύκλο $(x – 5)^2 + (y + 1)^2 = 10$ και παράλληλη με την ευθεία $x – 3y + 5 = 0$. *(Απ. $y=\frac{1}{3}x-6$ και $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$)*.
14. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$ και παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$. *(Απ. $y = x – 2$ και $y = x + 2$)*.
15. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$ και κάθετη με την ευθεία $y = 2x + 1$. *(Απ. $y=-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}$ και $y=-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}$)*.

16. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτομένη στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$ και διέρχεται από το σημείο (3, 0). *(Απ.* $y = -2\sqrt{14}x + 6\sqrt{14}$ *και* $y = 2\sqrt{14}x - 6\sqrt{14}$*)*.
17. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (1, 0) και εφάπτεται στην ευθεία $3x + 4y + 2 = 0$.
18. Να βρεθεί το κέντρο του κύκλου και η ακτίνα του όταν έχει εξίσωση $4x^2 + 4y^2 - 12x + 5 = 0$.
19. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία (0, 0) και (8, 0) και εφάπτεται στην ευθεία $y = -2$.
20. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία (2, 3), (–2, –1) και (–1, –1). *(Απ.* $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 4 = 0$*)*.
21. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία (3, 2) και (1, –2) και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $x + y + 1 = 0$.
22. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των κύκλων $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ και $x^2 + (y - 3)^2 = 4$.
23. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $y = λx + β$ να εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 = ρ^2$.
24. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $y = λx + β$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = ρ^2$ να έχουν δύο κοινά σημεία.
25. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $y = λx + β$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = ρ^2$ να μην έχουν κοινά σημεία.
26. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η ευθεία $λx - y + 4 = 0$ να είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.
27. Σε μια παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$, να αποδειχθεί ότι η κορυφή της παραβολής είναι το πλησιέστερο στην εστία σημείο της.
28. Αν Μ είναι ένα σημείο της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 2px$, να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο ΕΜ, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον άξονα y'y.
29. Να αποδειχθεί ότι οι παραβολές με εξισώσεις $y^2 = 2px$ και $x^2 = 2py$ τέμνονται στα σημεία (0, 0) και (2p, 2p).
30. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 6x$ που περνάνε από το σημείο (0, 1).
31. Να αποδειχθεί ότι η παραβολή $y^2 = 2px$ και η ευθεία $y = x$ έχουν δύο κοινά σημεία.
32. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ που είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x - 1$.
33. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x + 1$.
34. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ που διέρχεται από το σημείο (–2, 1).
35. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = px$ και της ευθείας $y = λx + β$.
36. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ που είναι κάθετη στην ευθεία $3x + y + 3 = 0$. *(Απ.* $y = \frac{1}{3}x + 3$*)*.

37. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 4x$ που μπορούμε να φέρουμε από το σημείο (–2, 1). *(Απ. $x - 2y + 4 = 0$ και $x + y + 1 = 0$).*
38. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -3x + 1$.
39. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$ που είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.
40. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$ που διέρχεται από το σημείο (0, 4).
41. Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των ευθειών $\alpha y = \lambda\beta(\alpha + x)$ και $\lambda\alpha y = \beta(\alpha - x)$, όπου $0<\beta<\alpha$, ανήκει στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για $\forall\, \lambda \in R^*$.
42. Αν η εφαπτομένη μιας έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία (p, 0) και (0, q), να αποδειχθεί ότι $\frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{q^2} = 1$.
43. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ που περνάνε από το σημείο (2, 3).
44. Να αποδειχθεί ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1$, όπου $\alpha>\beta$, έχουν τις ίδιες εστίες $\forall\, \lambda \in R$.
45. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 20$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $4x + y + 4 = 0$.
46. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 20$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x + 4y + 12 = 0$.
47. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 20$ που διέρχονται από το σημείο (0, 10).
48. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ είναι κορυφές τετραγώνου.
49. Για μια έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ να βρεθούν οι συντεταγμένες p και q των σημείων τομής της εφαπτομένης σ' ένα σημείο της έλλειψης με τους άξονες x'x και y'y και να αποδειχθεί ότι $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$.

50. Αν d και d' είναι οι αποστάσεις των εστιών της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ από μια εφαπτομένης της, να αποδειχθεί ότι ισχύει dd' = β^2.

51. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και της ευθείας y = λx + κ.

52. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ και $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ είναι κορυφές τετραγώνου.

53. Για τις ελλείψεις $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ και $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων τους.

54. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που διέρχεται από το σημείο (4, –1) και εφάπτεται στην ευθεία x + 4y – 10 = 0. *(Απ.* $\alpha^2=20$ *και* $\beta^2=5$ *ή* $\alpha^2=80$ *και* $\beta^2=\frac{5}{4}$ *).*

55. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$ και της παραβολής $y^2 = 2px$.

56. Να αποδειχθεί ότι είναι σταθερό το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ από τις ασύμπτωτές της. *(Απ.* $\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ *).*

57. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στην κορυφή (α, 0) τέμνει την ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ στο σημείο Γ, να αποδειχθεί ότι ισχύει (ΟΕ) = (ΟΓ).

58. Να αποδειχθεί ότι κάθε ευθεία που είναι παράλληλη προς μια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

59. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ που είναι παράλληλες με την ευθεία y = x + 1.

60. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ που είναι κάθετες στην ευθεία $y=-\frac{4}{\sqrt{3}}x$.

61. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ που διέρχονται από το σημείο (3, 0).

62. Αν από ένα σημείο της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τις ασύμπτωτες, να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται είναι σταθερό.
63. Να βρεθεί η εκκεντρότητα μιας υπερβολής της οποίας η ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει γωνία 60^o με την ασύμπτωτη $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.
64. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $9x^2 + 25y^2 = 225$.
65. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση κάθε εστίας της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ από τις ασύμπτωτές της είναι ίση με β.
66. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $9x^2 – y^2 = 32$ που είναι παράλληλες με την ευθεία $9x + y + 9 = 0$.
67. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $9x^2 – y^2 = 32$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x – 9y + 18 = 0$.
68. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $9x^2 – y^2 = 32$ που διέρχονται από το σημείο $(0, –16)$.
69. Να αποδειχθεί ότι η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$ και η υπερβολή $x^2 – 2y^2 = 2$ έχουν τις ίδιες εστίες και τέμνονται κάθετα, δηλαδή είναι κάθετες οι εφαπτομένες στα σημεία τομής τους.
70. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και της ευθείας $y =\lambda x + \kappa$.
71. Να αποδεχθεί ότι η εφαπτομένη μιας υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ σ' ένα σημείο της σχηματίζει με τις ασύμπτωτες της υπερβολής τρίγωνο που έχει εμβαδόν ίσο με το γινόμενο αβ.
72. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{9^2}=1$ που διέρχονται από το σημείο (3, 6).
73. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ και εφάπτεται στην ευθεία $x – y + 1 = 0$.
74. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ σ' ένα σημείο της Μ τέμνει τις ασύμπτωτές της στα σημεία Β και Γ, να αποδειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΒ και ΜΓ έχουν το ίδιο μήκος.
75. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει παραβολή και να βρεθούν η κορυφή και η εστία της : $y^2 + 4y + 8x – 28 = 0$.
76. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει έλλειψη και να βρεθούν το κέντρο, οι κορυφές και η εστία της : $9x^2 + 16y^2 + 54x – 32y – 47 = 0$.

77. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει υπερβολή και να βρεθούν το κέντρο, οι κορυφές και η εστία της : $2y^2 – 3x^2 – 8y + 6x – 1 = 0$.
78. Να αποδειχθεί ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in R$, η εξίσωση $x^2 + y^2 – 2\lambda x – 1 = 0$ παριστάνει κύκλο και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
79. Να βρεθούν οι τιμές των λ και $\beta \in R$, ώστε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ να εφάπτεται και στους δύο κύκλους $x^2 + y^2 = 1$ και $(x – 2)^2 + y^2 = 4$.
80. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ και εφάπτεται στην ευθεία $y = x + 1$.
81. Να βρεθεί τι παριστάνει η παρακάτω κωνική τομή $x^2 – 3y^2 – 2x – 12y – 12 = 0$.
82. Να βρεθεί τι παριστάνει η παρακάτω κωνική τομή $y^2 – 4x + 2y + 9 = 0$.
83. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει υπερβολή $9x^2 – 13y^2 – 18x – 52y – 160 = 0$.
84. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει παραβολή $x^2 – 4x – 2y + 4 = 0$.