

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Η έννοια του ολοκληρώματος έχει σχέση με το εμβαδόν ενός επιπέδου σχήματος (χωρίου). Θεωρούμε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ονομάζουμε **διαμέριση** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ κάθε πεπερασμένο σύνολο σημείων $[x_0, x_1, \dots, x_{v-1}, x_v]$ του $[\alpha, \beta]$ για το οποίο ισχύει $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{v-1} < x_v = \beta$ και τη συμβολίζουμε ως εξής:

$$P_v : \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{v-1} < x_v = \beta$$

Στην ουσία χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε v ίσα υποδιαστήματα με το καθένα να έχει μήκος ίσο με $\Delta_x = x_k - x_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{v}$, $k = 1, 2, \dots, v$.

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $f(x)$ που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και μια διαμέριση P_v όπως παραπάνω. Σε κάθε υποδιάστημα Δ_k του $[\alpha, \beta]$ θα υπάρχουν τότε δύο σημεία ε_k και μ_k όπου η συνάρτηση $f(x)$ θα έχει μια ελάχιστη τιμή $f(\varepsilon_k)$ και μια μέγιστη τιμή $f(\mu_k)$.

Δημιουργούμε τώρα δύο αθροίσματα ή ακολουθίες της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για τη διαμέριση P_v :

- Το ανώτερο άθροισμα $S_v = \sum_{k=1}^v f(\mu_k) \cdot \Delta_x$
- Το κατώτερο άθροισμα $s_v = \sum_{k=1}^v f(\varepsilon_k) \cdot \Delta_x$

Ισχύει το εξής:

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε οι ακολουθίες S_v και s_v συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό l όταν το v τείνει στο άπειρο:

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v = \lim_{v \rightarrow +\infty} s_v = l$$

Ονομάζουμε τώρα **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ (διαβάζουμε *ολοκλήρωμα της f από α έως β*) το κοινό όριο των παραπάνω ακολουθιών S_v και s_v και το συμβολίζουμε ως εξής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι **ολοκληρώσιμη** στο διάστημα $[α, β]$ και τα σημεία $α$ και $β$ ονομάζονται **όρια της ολοκλήρωσης**.

Ισχύει το εξής:

Κάθε συνάρτηση $f(x)$ που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[α, β]$ είναι ολοκληρώσιμη σ' αυτό.

Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, που εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση $f(x)$ και το διάστημα $[α, β]$. Ισχύει $α < β$.

Ισχύουν τα εξής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

$$\text{Αν } \alpha = \beta, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

$$\text{Αν } \alpha > \beta, \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$$

ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** μιας συνάρτησης $f(x)$, που είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ , λέγεται κάθε συνάρτηση $F(x)$ που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \Delta$. Αν $F(x)$ είναι μια παράγουσα της $f(x)$ στο διάστημα Δ , τότε κάθε άλλη παράγουσα της $f(x)$ στο Δ θα έχει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης $f(x)$ σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο Δ** και συμβολίζεται ως εξής:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Για κάθε συνάρτηση $f(x)$, που είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ , ισχύει το εξής:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Με τον όρο **ολοκλήρωση** αποκαλούμε την διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος μιας συνάρτησης και η σταθερά c αποκαλείται **σταθερά ολοκλήρωσης**.

Ακολουθούν τα αόριστα ολοκληρώματα μερικών βασικών συναρτήσεων:

- $\int 0 dx = c$
- $\int 1 dx = x + c$
- $\int \alpha dx = \alpha x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$
- $\int x^\nu dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c, \nu \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$
- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1, x > 0$
- $\int \sigma \nu \nu x dx = \eta \mu x + c$
- $\int \eta \mu x dx = -\sigma \nu \nu x + c$
- $\int \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \varepsilon \phi x + c$
- $\int \frac{1}{\eta \mu^2 x} dx = -\sigma \phi x + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

Ισχύουν τα εξής για το αόριστο ολοκλήρωμα:

- $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R}^*$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Ισχύει το εξής:

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, x \in \Delta$$

είναι μια αρχική συνάρτηση της $f(x)$ στο Δ , δηλ. $F'(x) = f(x), \forall x \in \Delta$.

Ισχύει το εξής:

Αν $F(x)$ είναι μια αρχική συνάρτηση της συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Μέθοδος Ολοκλήρωσης Κατά Παράγοντες

Για δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$, ισχύει:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων όταν το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα. Επίσης, είναι πολύ χρήσιμη μέθοδος για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των παρακάτω περιπτώσεων, όπου $P(x)$ είναι πολυώνυμο του x και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$:

- $\int P(x)e^{\alpha x} dx$
- $\int P(x)\eta\mu(\alpha x)dx$
- $\int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx$
- $\int P(x)\ln(\alpha x)dx$
- $\int e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x)dx$
- $\int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx$

Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση

Είναι χρήσιμη μέθοδος για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int f(g(x))g'(x)dx$. Θέτουμε $u = g(x)$, οπότε έχουμε $du = g'(x)dx$ και το ολοκλήρωμα γίνεται: $\int f(u)du$.

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Αν έχουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int \frac{\kappa x + \lambda}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$, με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή και χωρίζουμε το κλάσμα σε δύο άλλα κλάσματα με αριθμητές πραγματικούς αριθμούς και παρονομαστές συναρτήσεις του x αλλά πρώτου βαθμού.

Αν έχουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int \frac{P(x)}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x με βαθμό ≥ 2 και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε κάνουμε τη διαίρεση των δύο πολωνύμων και μετά έχουμε να επιλύσουμε δύο ολοκληρώματα, όπου το πρώτο είναι πολωνυμική συνάρτηση χωρίς κλάσμα και το δεύτερο ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση.

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

Αν έχουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta\mu^2 x dx$ και $\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx$, τότε είναι χρήσιμοι οι παρακάτω τύποι:

$$\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$$

Αν έχουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int \eta\mu(kx)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)dx$, $\int \sigma\upsilon\nu(kx)\sigma\upsilon\nu(\lambda x)dx$ και $\int \eta\mu(kx)\eta\mu(\lambda x)dx$, τότε είναι χρήσιμοι οι παρακάτω τύποι:

$$\begin{aligned} 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta &= \eta\mu(\alpha+\beta) + \eta\mu(\alpha-\beta) \\ 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) \\ 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta &= \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ένας πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το αόριστο ολοκλήρωμα που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων, και εκφράζει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, τον άξονα x 's και τις κατακόρυφες ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (όρια ολοκλήρωσης) και έτσι έχουμε:

$$\int_a^b f(x)dx = E(\Omega)$$

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα ισχύουν τα εξής:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Αν $\forall x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$, τότε $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^b f(x)dx$
- Αν $\forall x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \leq g(x)$, τότε $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

- $\left| \int_a^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_a^{\beta} |f(x)| dx$
- $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$
- $\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$
- $\int_a^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(a) = [G(x)]_a^{\beta}$, όπου G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ (Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού)
- $\int_a^{\beta} f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^{\beta} - \int_a^{\beta} f'(x) g(x) dx$ (Ολοκλήρωση κατά παράγοντες)
- $\int_a^{\beta} f(g(x)) g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$, όπου $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(\beta)$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$, ώστε να ισχύει: $\int_a^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$.

Ο αριθμός $\frac{\int_a^{\beta} f(x) dx}{\beta - \alpha}$ λέγεται **μέση τιμή** της συνάρτησης f στο διάστημα

$[\alpha, \beta]$, συμβολίζεται με $\bar{f}$ και από γεωμετρική άποψη παριστάνει το ύψος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που έχει βάση το $[\alpha, \beta]$ και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, τον άξονα x' και τις κατακόρυφες ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας ή περισσότερων συναρτήσεων, τον άξονα $x'x$ και κάποιες κατακόρυφες ευθείες, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε x που ανήκει σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $E(\Omega) = \int_a^\beta f(x)dx$.
- Αν έχουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και ισχύει $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε x που ανήκει σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε το εμβαδόν που βρίσκεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$. Ο τύπος αυτός ισχύει και όταν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x που ανήκει σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$.
- Αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ και ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε x που ανήκει σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $E(\Omega) = -\int_a^\beta f(x)dx$.
- Αν έχουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ και η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε x που ανήκει σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$, τότε το εμβαδόν που βρίσκεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)|dx$.
- Συνοπτικά, η παράσταση $\int_a^\beta f(x)dx$ παριστάνει το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (x^3 + \eta \mu x + \sigma \nu x) dx$.

$$(Απ. \frac{x^4}{4} - \sigma \nu x + \eta \mu x + c).$$

2. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \left(\frac{1}{\sigma \nu^2 x} - \frac{1}{\eta \mu^2 x} \right) dx$.

$$(Απ. \varepsilon \phi x + \sigma \phi x + c).$$

3. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \left(\frac{x+3}{x+2} \right) dx$.

$$(Απ. x + \ln|x+2| + c).$$

4. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int e^x \sigma \nu 2x dx$.

$$(Απ. \frac{1}{5} e^x (\sigma \nu 2x + 2\eta \mu 2x) + c).$$

5. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$. (Απ. $x \ln x - x + c$).

6. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^4} dx$.

$$(Απ. \frac{-1}{6(x^2+6x)^3} + c).$$

7. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$.

$$(Απ. \frac{2}{3} \sqrt{2+x^3} + c).$$

8. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$.

$$(Απ. \ln|x^2-3x+2| + c).$$

9. Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{2}{x^2-1} dx$.

$$(Απ. \ln|x-1| - \ln|x+1| + c).$$

10. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\int_1^e \ln t dt = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt$.

11. Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$. (Απ. 6).

12. Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma \nu x - 2\eta \mu x) dx$. (Απ. -1).

13. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_1^{\sigma \nu x} \sqrt{1-t^2} dt$.

$$(Απ. -\eta \mu x |\eta \mu x|).$$

14. Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$.

$$(A\pi. \ 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}).$$

15. Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx$. (Aπ. $\frac{11}{6}$).
16. Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 x e^{-x} dx$. (Aπ. $\frac{e-2}{e}$).
17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, η κ είναι σταθερά και ισχύει $\int_a^\beta (f(x) - \kappa) dx = 0$, τότε να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή της συνάρτησης $\overline{f}$ στο διάστημα $[a, \beta]$ είναι ίση με κ .
18. Αν οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$ είναι ορισμένες σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $a > 0$, να υπολογιστούν οι μέσες τιμές των συναρτήσεων $\overline{f}$ και $\overline{g}$ στο διάστημα αυτό και ναδειχθεί ότι $\overline{f} \cdot \overline{g} > 1$.