ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ταυτότητα αποκαλείται η ισότητα ανάμεσα σε δύο αλγεβρικές παραστάσεις, η οποία αληθεύει γι' όλες τις τιμές των μεταβλητών από τις οποίες εξαρτώνται οι αλγεβρικές παραστάσεις. Θα δούμε μερικές πολύ βασικές και χρήσιμες ταυτότητες.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 + 2\alpha\beta$

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$\alpha^{2\nu} - \beta^{2\nu} = (\alpha^\nu+\beta^\nu)(\alpha^\nu-\beta^\nu)$, όπου $\nu \in \mathrm{N}$

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$

$(x+\alpha)(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$

$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) = x^3 + (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$

Για ν όρους :

$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\ldots(x+\alpha_\nu) = x^\nu + (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)x^{\nu-1} +$
$(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-2} +$
$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\ldots+\alpha_1\alpha_3\alpha_\nu+\alpha_1\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+\ldots+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\ldots+$
$\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-3} + \ldots + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{\nu-1}+\ldots)x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu$

ή

$$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\ldots(x+\alpha_\nu) = x^\nu + \Sigma_1 x^{\nu-1} + \Sigma_2 x^{\nu-2} + \ldots + \Sigma_{\nu-1}x + \Sigma_\nu$$

όπου

$\Sigma_1 = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu$
$\Sigma_2 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$
$\Sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\ldots+\alpha_1\alpha_3\alpha_\nu+$
$\alpha_1\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+\ldots+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\ldots+\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$
$\Sigma_{\nu-1} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{\nu-1} + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu + \ldots$
$\Sigma_\nu = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu$

και

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_\nu) = x^\nu-\Sigma_1x^{\nu-1}+\Sigma_2x^{\nu-2} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\Sigma_{\nu-1}x+(-1)^\nu\Sigma_\nu$$

$\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$, όπου $\nu\in \mathbb{N}$

$\alpha^\nu + \beta^\nu = (\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 - \ldots - \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$, όπου $\nu\in \mathbb{N}$ και $\nu=2\kappa+1$, δηλ. περιττός

ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta$$

$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_1\alpha_\nu +$
$2\alpha_2\alpha_3 + \ldots + 2\alpha_2\alpha_\nu + \ldots + 2\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$

ή

$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^2 = \Sigma\alpha_i^2 + 2\Sigma\alpha_i\alpha_j$
όπου $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$, $j = 2, 3, \ldots, \nu$ και $i \neq j$

Το τετράγωνο πολυωνύμου με ν όρους είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώγων των όρων του συν το διπλάσιο του αθροίσματος των γινομένων των όρων του λαμβανομένων ανά δύο μ' όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

Ο ΚΥΒΟΣ ΤΡΙΩΝΥΝΟΥ

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha^2\gamma + 3\beta^2\alpha + 3\beta^2\gamma + 3\gamma^2\alpha + 3\gamma^2\beta + 6\alpha\beta\gamma$$

ή

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

Ο κύβος τριωνύμου είναι ίσος με το άθροισμα των κύβων των όρων του συν το τριπλάσιο του γινομένου του αθροίσματος των όρων του λαμβανομένων ανά δύο μ' όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ DE MOIVRE

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2 = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ GAUCHY

$$(\alpha+\beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3 = 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$(\alpha+\beta)^5 - \alpha^5 - \beta^5 = 5\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$$(\alpha+\beta)^7 - \alpha^7 - \beta^7 = 7\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ SCHWARZ

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\ldots+\beta_\nu^2) \geq (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$$

ΜΙΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$$

ή

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ LAGRANGE

Για τέσσερις όρους :

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

Για έξι όρους :

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 =$$

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2$$

Για 2ν όρους :

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_\nu^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu)^2 =$$

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_1\beta_\nu - \alpha_\nu\beta_1)^2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + \ldots +$$

$$(\alpha_2\beta_\nu - \alpha_\nu\beta_2)^2 + \ldots + (\alpha_{\nu-1}\beta_\nu - \alpha_\nu\beta_{\nu-1})^2 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \ldots + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_n & b_n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \ldots + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_n & b_n \end{vmatrix}^2 + \ldots + \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix}^2$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ

$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma : \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$$

$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma : \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=0 \vee \beta=0 \vee \gamma=0 \Leftrightarrow (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$$

$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma : \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha+\beta=\gamma \vee \beta+\gamma=\alpha \vee \gamma+\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$$

ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΟ ΤΟΥ NEWTON

Για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών α και β και $\forall \nu \in N$, ισχύει ο τύπος του διωνύμου του Newton :

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \binom{n}{0}\alpha^{\nu} + \binom{n}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{n}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^{2} + \dots + \binom{n}{k}\alpha^{\nu-k}\beta^{k} + \dots + \binom{n}{n-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{n}{n}\beta^{\nu}$$

Ο παραπάνω τύπος γράφεται και ως εξής :

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} + \nu\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{\nu-2}\beta^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^{\nu-3}\beta^{3} + \dots + \beta^{\nu}$$

Ή και πιο σύντομα ως εξής :

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\alpha^{\nu-k}\beta^{k}$$

Η παράσταση $\binom{n}{k}$ είναι ο συνδυασμός των ν πραγμάτων ανά k και είναι ίση με : $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, όπου $\nu! = 1.2.3 \dots \nu = \prod_{k=1}^{n} k$

Μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις για τον σχηματισμό του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^{\nu}$:

1. Είναι ένα πλήρες ομογενές πολυώνυμο ν βαθμού, που είναι διατεταγμένο κατά τις κατιούσες δυνάμεις του α και τις ανιούσες δυνάμεις του β.
2. Οι δυνάμεις του α ξεκινούν από το ν και ελαττώνονται κατά ένα μέχρι να γίνουν 0, ενώ οι δυνάμεις του β ξεκινούν από το 0 και αυξάνουν κατά ένα μέχρι να γίνουν ν.
3. Σε κάθε όρο το άθροισμα των εκθετών του α και του β είναι σταθερό και ίσο με ν.
4. Το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι ίσο με ν+1.
5. Οι όροι του αναπτύγματος που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν ίσους συντελεστές.
6. Αν ο ν είναι άρτιος αριθμός, τότε το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι περιττός αριθμός και υπάρχει ένας μόνο μεσαίος όρος που έχει τον μεγαλύτερο συντελεστή και οι εκθέτες των α και β είναι ίσοι.
7. Αν ο ν είναι περιττός αριθμός, τότε το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι άρτιος αριθμός και υπάρχουν δύο μεσαίοι όροι που έχουν τον ίδιο συντελεστή, που είναι και ο μεγαλύτερος του αναπτύγματος.

8. Στο ανάπτυγμα $(\alpha+\beta)^{\nu}$ όλοι οι όροι έχουν θετικό πρόσημο, ενώ στο ανάπτυγμα $(\alpha-\beta)^{\nu}$ το πρόσημο των όρων είναι εναλλάξ θετικό και αρνητικό.
9. Κάθε συντελεστής προκύπτει αν λάβουμε το γινόμενο του συντελεστή επί τον εκθέτη του προηγούμενου όρου και διαιρέσουμε με τον αριθμό που δηλώνει την τάξη του προηγούμενου όρου.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα :

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$(\alpha-\beta)^4 = \alpha^4 - 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$$

$$(\alpha-\beta)^5 = \alpha^5 - 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 - \beta^5$$

$$(\alpha+\beta)^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$$

$$(\alpha-\beta)^6 = \alpha^6 - 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 - 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 - 6\alpha\beta^5 + \beta^6$$

Οι διωνυμικοί συντελεστές έχουν μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+ \dots + \binom{n}{n} = 2^{\nu} \text{ ή } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{\nu}$$

Από τον παραπάνω τύπο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα σύνολο που περιέχει ν στοιχεία, έχει 2^{ν} υποσύνολα.

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+ \dots = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+ \dots = 2^{\nu-1}$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$